第 33 卷第 5 期　　大　学　数　学　　Vol. 33, №. 5
2017 年 10 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Oct. 2017

二阶非对称实矩阵合同的充要条件

周江涛，　孙胜先
（合肥工业大学 数学学院，合肥 230009）

［摘　要］给出了二阶非对称实矩阵合同判定的充要条件. 举例说明此方法简单，实用.

［关键词］非对称实矩阵；合同；对角化
［中图分类号］O172　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2017)05-0052-04

1　引　　言

由于非实对称矩阵合同的判定非常复杂，关于非实对称矩阵合同的判定方面的研究较少.

最近文[1]仅在 $\boldsymbol{A}_s,\boldsymbol{B}_s$ 为正定的前提下，给出了判别两非实对称阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的一个充分条件，从文[1]例中可看出，即使是二阶非对称实矩阵，用文[1]的方法判定起来也是相当的麻烦. 本文在 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为二阶非对称实矩阵的情况下，给出了 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的一个充要条件，此方法简洁明了.

为便于读者了解本文内容，本文中的记号同文[1].

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}+\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2},\quad \boldsymbol{A}_s=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2},\quad \boldsymbol{A}_\omega=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2},$$

$\boldsymbol{A}_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对称部分，$\boldsymbol{A}_\omega$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的反对称部分，并用记号 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，$|\boldsymbol{A}|$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

2　主要定理及证明

引理 1　若 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}_s\simeq\boldsymbol{B}_s$，$\boldsymbol{A}_\omega\simeq\boldsymbol{B}_\omega$.

证　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_s+\boldsymbol{A}_\omega$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_s+\boldsymbol{B}_\omega$，若有 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{B}_\omega-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_\omega\boldsymbol{P},$$

等式的左边为对称而右边为反对称，从而有 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_s$，$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_\omega\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_\omega$. 此引理为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的必要而非充分条件.

引理 2　$\boldsymbol{P}$ 为二阶实矩阵，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}$，$a$ 为正实数，则有

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{cases}\boldsymbol{A}, & |\boldsymbol{P}|=1,\\ -\boldsymbol{A}, & |\boldsymbol{P}|=-1.\end{cases}$$

证　设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，$x_i$ 为实数（$i=1,2,3,4$），则

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & a|\boldsymbol{P}|\\ -a|\boldsymbol{P}| & 0\end{bmatrix}=\begin{cases}\boldsymbol{A}, & |\boldsymbol{P}|=1,\\ -\boldsymbol{A}, & |\boldsymbol{P}|=-1.\end{cases}$$

［收稿日期］2017-07-25；［修改日期］2017-09-13
［基金项目］合肥工业大学《线性代数》平台课程优化建设项目(KCWT1610)
［作者简介］周江涛(1978－)，男，讲师，从事运筹决策方向研究. Email：carlzhou27@aliyun.com
［通讯作者］孙胜先(1963－)，男，副教授，从事矩阵理论研究. Email：11655410@qq.com

引理 3[2]　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称阵，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的正负惯性指数，即相同的正负特征值个数.

引理 4[2]　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称阵，则有正交阵 $\boldsymbol{P}$ 满足

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda},\quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

其中 λ_i 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定理 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a\\ -a & \lambda_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\lambda_3 & b\\ -b & \lambda_4\end{bmatrix}$，$a,b$ 为正实数，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件为 $\boldsymbol{A}_s$ 合同于 $\boldsymbol{B}_s$ 且 $b^2\lambda_1\lambda_2=a^2\lambda_3\lambda_4$.

证　先证必要性. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件为存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，满足 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，设 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，则得 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 合同的充要条件为方程组

$$\begin{cases}\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_3^2=\lambda_3,\\ \lambda_1x_1x_2+\lambda_2x_3x_4=0,\\ \lambda_1x_2^2+\lambda_2x_4^2=\lambda_4,\\ a(x_1x_4-x_2x_3)=b.\end{cases}$$

有解，由此得

$$\begin{aligned}\lambda_3\lambda_4&=(\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_3^2)(\lambda_1x_2^2+\lambda_2x_4^2)\\&=(\lambda_1x_1x_2+\lambda_2x_3x_4)^2+\lambda_1\lambda_2(x_1x_4-x_2x_3)^2\\&=\frac{b^2}{a^2}\lambda_1\lambda_2,\end{aligned}$$

即 $b^2\lambda_1\lambda_2=a^2\lambda_3\lambda_4$. 又由引理 1 知 $\boldsymbol{A}_s$ 必合同于 $\boldsymbol{B}_s$，从而必要性得证.

下证充分性. 由于 $\boldsymbol{A}_s$ 合同于 $\boldsymbol{B}_s$ 即 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ 合同于 $\begin{bmatrix}\lambda_3 & 0\\ 0 & \lambda_4\end{bmatrix}$ 可分以下几种情况证明.

(i) $\lambda_1\lambda_3>0$，$\lambda_2\lambda_4>0$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}}\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(ii) $\lambda_1\lambda_4>0$，$\lambda_2\lambda_3>0$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_1}}\\ -\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} & 0\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(iii) $\lambda_1=\lambda_4=0$，$\lambda_2\lambda_3>0$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}\\ \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} & 0\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(iv) $\lambda_1=\lambda_3=0$，$\lambda_2\cdot\lambda_4>0$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}}\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

(v) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$，取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\sqrt{\frac{b}{a}} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{b}{a}}\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$.

显然(i)～(v)中 C 均为可逆阵，从而充分性得证.

定理 2 若 A,B 为二阶非对称实矩阵，设

$$A_\omega=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix},\quad B_\omega=\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix},$$

则 A,B 合同的充要条件为 $A_s\simeq B_s$ 且 $b^2|A_s|=a^2|B_s|$.

证 因为

$$\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{bmatrix}-a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\overset{c_1\leftrightarrow c_2}{\sim}\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix},$$

即$\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}$正交合同于$\begin{bmatrix}0 & -a\\ a & 0\end{bmatrix}$，故不妨设 $a>0,b>0$，又由于 A_s,B_s 均为实对称阵，由引理 2，引理 4 知存在正交阵 P,Q 满足

$$P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & a\\ -a & \lambda_2\end{bmatrix},$$

$$Q^TBQ=\begin{bmatrix}\lambda_3 & 0\\ 0 & \lambda_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_3 & b\\ -b & \lambda_4\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 分别为 A_s,B_s 的特征值. 由定理 1 知存在可逆阵 C，使得

$$C^T(P^TAP)C=Q^TBQ,$$

由此得

$$(QC^TP^T)A(PCQ^T)=B.$$

令 $D=PCQ^T$，则有 $D^TAD=B$. 而 D 显然可逆，所以 A 合同于 B.

下面以文[1]中的两个例子来说明本文判别法的实用性.

例 1 判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$与 $B=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}$是否合同.

因为

$$A_s=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad A_\omega=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix},\quad B_s=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad A_\omega=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix},$$

$|A_s|=-3$，$|B_s|=-8$，$a=2$，$b=3$，$b^2|A_s|=-27$，$a^2|B_s|=-32$，$b^2|A_s|\neq a^2|B_s|$，所以 A 与 B 不合同.

此例也说明了即使 $A_s\simeq B_s,A_\omega\simeq B_\omega$，但 A,B 却不一定合同.

例 2 判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}18 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$与 $B=\begin{bmatrix}10 & 2+\sqrt{2}\\ 2-\sqrt{2} & 2\end{bmatrix}$是否合同.

解 $A_s=\begin{bmatrix}18 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，$A_\omega=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$，$a=2$，

$$B_s=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix},\quad B_\omega=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix},\quad b=\sqrt{2}.$$

显然 A_s,B_s 正定，所以 A_s,B_s 合同. 而 $b^2|A_s|=a^2|B_s|=64$，所以 A,B 合同.

3 结 论

由以上例子可看出，本文关于两矩阵合同的判别方法，简单实用. 但在二阶矩阵前提下才成立的引理 2 是本文结论的关键. 对于三阶及三阶以上的矩阵，很难建立类似的结论，在一些特定的条件下，可以建立判别两矩阵合同的充分条件. 文[1]就是在矩阵 A_s,B_s 均正定的前提下，给出了 A,B 合同的充分条件.

［参　考　文　献］

［1］ 李成博，等．非对称实矩阵合同的条件［J］．大学数学，2015，31(4)：79－82．
［2］ 姚慕生，吴泉水，谢启鸿．高等代数学［M］．3 版．上海：复旦大学出版社，2014：362－429．
［3］ 天津大学数学系代数教研组．线性代数及其应用［M］．北京：科学出版社，2010：253－254．

A Necessary and Sufficient Conditions on the Congruence of Non-symmetric Real Matrices

ZHOU Jiang-tao，　*SUN Sheng-xian*
(School of Mathematics，HeFei University of Technology，Hefei 230009，China)

Abstract：Within the knowledge of linear algebra courses，Necessary and Sufficient Conditions on the Congruence of Non-symmetric Real Matrices are given. Some examples show that the simple and practical method is easy to be mastered by engineering students.

Key words：non-symmetric real matrices；congruence；diagonalization