第 32 卷第 4 期　　大　学　数　学　　Vol. 32, №. 4
2016 年 8 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Aug. 2016

曲线积分的换元法

宁荣健，　彭凯军
（合肥工业大学 数学学院，合肥 230009）

［摘　要］给出了曲线积分的换元法，丰富了曲线积分的计算方法.

［关键词］曲线积分；换元法；平面曲线；空间曲线；变换
［中图分类号］O13；O172.2　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2016)04-0062-06

1　问题的提出

在数学分析和高等数学课程的教学过程中，分别介绍了定积分的换元法和重积分的换元法，那么曲线积分是否有换元呢？理论上说应该是可以肯定的，但是具体涉及到两类曲线积分，其换元法分别是什么？下面我们来具体讨论.

2　主要结论

定理 1（对弧长的平面曲线积分换元法）　设平面曲线 L 的方程为 $\varphi(x,y)=0$，变换

$$\begin{cases} x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$$

将 uOv 平面上的平面曲线 L' 一对一地变为 xOy 平面上的 L，其中 $\varphi(x,y)$ 在 L 上具有一阶连续偏导数，$x(u,v)$，$y(u,v)$ 在 L' 上具有一阶连续偏导数，且

$$(\varphi_1'^2+\varphi_2'^2)\big|_L\neq 0,\quad \left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{L'}\neq 0,$$

$f(x,y)$ 在 L 上连续. 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L'} f(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}{\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\begin{pmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{pmatrix}\right\|}\,\mathrm{d}s_{uv},$$

其中 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$，　$\mathrm{d}s_{uv}=\sqrt{(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2}$，　$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$.

证　由 $\varphi(x,y)=0$ 得 $\varphi_1'\mathrm{d}x+\varphi_2'\mathrm{d}y=0$，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\varphi_2'}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-\varphi_1'}=k$，则 $\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{pmatrix}$，两边单位化得

［收稿日期］2016-05-11；［修改日期］2016-06-12
［基金项目］安徽省重大教学改革项目(2015zdjy020)；受“高等学校大学数学教学研究与发展中心”资助
［作者简介］宁荣健(1962－)，男，副教授，从事计算数学研究和大学数学教学，Email：nrjian@126.com
［通讯作者］彭凯军(1979－)，男，讲师，从事计算数学研究，Email：lxy_pkj@126.com

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

$$\frac{1}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix},\quad 即\quad \begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\pm\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}.$$

由 $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 得 $\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$，进而有 $\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\pm\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}$，两边求模得 $\mathrm{d}s_{uv}=\dfrac{\left\|J^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|}{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}\mathrm{d}s$，因此 $\mathrm{d}s=\dfrac{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}{\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}$，故

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L'}f(x(u,v),y(u,v))\frac{\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}}{\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|}\mathrm{d}s_{uv}.$$

例 1　计算 $I=\oint_L\dfrac{1}{\sqrt{5-4xy+4y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为曲线 $x^2-4xy+5y^2=1$.

解法一　将曲线 L 的方程转化为 $(x-2y)^2+y^2=1$. 令 $x-2y=\cos t, y=\sin t$，得 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t+2\sin t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

故

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5-4(\cos t+2\sin t)\sin t+4\sin^2 t}}\times\sqrt{(-\sin t+2\cos t)^2+(\cos t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-4\sin t\cos t+4\cos^2 t}}\times\sqrt{1-4\sin t\cos t+4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

解法二　$L:(x-2y)^2+y^2=1$. 令 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=y,\end{cases}$ 则 $\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$.

令 $\varphi(x,y)=x^2-4xy+5y^2-1$，故 $\varphi_1'=2x-4y, \varphi_2'=-4x+10y$，所以

$$\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}=\sqrt{(2x-4y)^2+(-4x+10y)^2}=2\sqrt{5x^2-24xy+29y^2}=2\sqrt{5-4xy+4y^2},$$

$$\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}2\varphi_1'+\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2y\\ -2x+4y\end{pmatrix}\right\|=2\sqrt{x^2-4xy+5y^2}=2,$$

且 $L':u^2+v^2=1$，故利用定理 1 得

$$I=\int_{L'}\mathrm{d}s_{uv}=L'\text{ 的弧长}=2\pi.$$

推论 1　在定理 1 中，如果 J 为正交矩阵，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L'}f(x(u,v),y(u,v))\mathrm{d}s_{uv}.$$

证　如果 J 为正交矩阵，则 $\left\|\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}\right\|=\left\|\boldsymbol{J}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}\right\|$. 得 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}s_{uv}$.

或由 $\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}\varphi_2'\\ -\varphi_1'\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2}$，也可得 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}s_{uv}$，故得证.

例 2　计算 $I=\int_L\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}s$，其中 L 为 $y=\ln\cos x, -\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

解　作正交变换 $u=-x, v=y$，则 $x=-u, y=v$，$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$. 故由定理 1 得

$$I=\int_{L'}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}s_{uv}=\int_{L'}\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}s_{uv}=\int_{L'}\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\right)\mathrm{d}s_{uv}=\int_{L'}\mathrm{d}s_{uv}-\int_{L'}\frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}s_{uv},$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 L' 为 $v=\ln\cos u,-\frac{\pi}{4}\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{4}$，由对称性得 $\int_{L'}\frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}s_{uv}=\int_L\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}s=I$，所以

$$I=\frac{1}{2}\int_{L'}\mathrm{d}s_{uv}=\frac{1}{2}L'\text{ 的弧长 }=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(-\tan u)^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec u\,\mathrm{d}u=\ln(\sec u+\tan u)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(\sqrt{2}+1).$$

与定理 1 相仿，有

定理 2（对弧长的空间曲线积分换元法）　设空间曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0,\end{cases}$$

变换

$$\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$$

将 $O-uvw$ 空间中的曲线 Γ' 一对一地变为 $O\text{-}xyz$ 空间中的 Γ，其中 $\varphi(x,y,z)$，$\psi(x,y,z)$ 在 Γ 上具有一阶连续偏导数，$x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)$ 在 Γ' 上具有一阶连续偏导数，记 $\boldsymbol{G}(x,y,z)=\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)\times\operatorname{grad}\psi(x,y,z)$，如果

$$\boldsymbol{G}(x,y,z)\big|_{\Gamma}\neq\boldsymbol{0},\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\bigg|_{\Gamma'}\neq 0,$$

$f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续. 则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma'}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\frac{\left\|\boldsymbol{G}(x,y,z)\right\|}{\left\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{G}(x,y,z)^T\right\|}\mathrm{d}s_{uvw},$$

其中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2},\quad \mathrm{d}s_{uvw}=\sqrt{(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2+(\mathrm{d}w)^2},\quad \boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}.$$

推论 2　在定理 2 中，如果 $\boldsymbol{J}$ 为正交矩阵，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma'}f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\mathrm{d}s_{uvw}.$$

下面给出对坐标的曲线积分换元法.

定理 3（对坐标的平面曲线积分换元法）　设 L 为平面有向光滑曲线，起点为 A，终点为 B. 变换 $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 将 uOv 平面上的有向曲线 L' 和点 A',B' 一对一地变为 xOy 平面上的 L 和点 A,B，且 L' 的起点为 A'，终点为 B'，其中 $x(u,v),y(u,v)$ 在 L' 上具有一阶连续偏导数，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big|_{L'}\neq 0$，$P=P(x,y)$，$Q=Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L'}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v,$$

证　由 $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$ 得 $\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$，故

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P,Q)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}=\int_{L'}(P,Q)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$= \int_{L'} \left(P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(P\frac{\partial x}{\partial v} + Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)\mathrm{d}v\,.$$

定理 4（**对坐标的空间曲线积分换元法**）　设 Γ 为空间有向光滑曲线，起点为 A，终点为 B．变换

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

将 $O\text{-}uvw$ 空间中的有向曲线 Γ' 和点 A'，B' 一对一地变为 $O\text{-}xyz$ 空间中的 Γ 和点 A，B，且 Γ' 的起点为 A'，终点为 B'，其中 $x(u,v,w)$，$y(u,v,w)$，$z(u,v,w)$ 在 Γ' 上具有一阶连续偏导数，$\left.\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|_{\Gamma'} \neq 0$，$P = P(x,y,z)$，$Q = Q(x,y,z)$，$R = R(x,y,z)$ 在 Γ 上连续，则

$$\int_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
$$= \int_{\Gamma'} \left(P\frac{\partial x}{\partial u} + Q\frac{\partial y}{\partial u} + R\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(P\frac{\partial x}{\partial v} + Q\frac{\partial y}{\partial v} + R\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}v + \left(P\frac{\partial x}{\partial w} + Q\frac{\partial y}{\partial w} + R\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}w\,.$$

注　在定理 3 中，如果 L 为有向封闭曲线，则在 L 上任取三点 A，B 和 C，将 L 分为三个有向线段 L_1，L_2 和 L_3，其中 L_1 的起点为 A，终点为 B；L_2 的起点为 B，终点为 C，L_3 的起点为 C，终点为 A．在变换

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

下，L 变为 L'，A,B,C 分别变为 A'，B'，C'，L_1,L_2,L_3 分别变为 L_1',L_2',L_3'，其中 L_1' 的起点为 A'，终点为 B'；L_2' 的起点为 B'，终点为 C'，L_3' 的起点为 C'，终点为 A'，并由此确定 L' 的方向．

在定理 4 中，如果 Γ 为有向封闭曲线，则可运用同样的方法确定 L' 的方向．

例 3　计算 $I = \oint_{\Gamma} (x-y)^2\mathrm{d}x + (x-z)(y-z)\mathrm{d}y + (x+3y-2z)\mathrm{d}z$，其中 Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1, \\ x+y+z = 1, \end{cases}$ 若从 z 轴正向向原点看去，Γ 为逆时针方向．

解法一　设 Σ：$x+y+z=1$，$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，并取上侧，则 Σ 的单位法向量为 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{1}{\sqrt3}\right\}$，故 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt3}$，由斯托克斯公式得

$$I = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3} & \dfrac{1}{\sqrt3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (x-y)^2 & (x-z)(y-z) & x+3y-2z \end{vmatrix} \mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt3}\iint_{\Sigma}(2+3x-3z)\mathrm{d}S\,.$$

又 Σ 在 xOy 平面上的投影区域为椭圆区域 D_{xy}：$2x^2+2y^2+2xy-2x-2y \leqslant 0$．作正交变换

$$u = \frac{1}{\sqrt2}(x+y),\quad v = \frac{1}{\sqrt2}(x-y)\,,$$

将 D_{xy} 变换为 uOv 平面上的区域 D_{uv}：$3u^2+v^2-2\sqrt2 u \leqslant 0$，即 $\dfrac{\left(u-\frac{\sqrt2}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} + \dfrac{v^2}{\frac{2}{3}} \leqslant 1$．再作平移变换 $\begin{cases} s = u-\dfrac{\sqrt2}{3}, \\ t = v, \end{cases}$ 则 D_{uv} 变为 D_{st}：$\dfrac{s^2}{\frac{2}{9}} + \dfrac{t^2}{\frac{2}{3}} \leqslant 1$，所以

$$I = \frac{1}{\sqrt3}\iint_{D_{xy}}(-1+6x+3y)\ \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}}(-1+6x+3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$= \iint\limits_{D_{uv}} \left(-1+\frac{9}{2}\sqrt{2}u+\frac{3}{2}\sqrt{2}v\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{D_{uv}} \left(-1+\frac{9}{2}\sqrt{2}u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint\limits_{D_{st}} \left[-1+\frac{9}{2}\sqrt{2}\left(s+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \iint\limits_{D_{st}} \left(2+\frac{9}{2}\sqrt{2}s\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 2\iint\limits_{D_{st}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= 2D_{st}\text{ 的面积} = 2\times\sqrt{\frac{2}{9}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\pi = \frac{4}{9}\sqrt{3}\pi.$$

解法二　采用变换思想，利用定理 4 计算此积分.

由于空间曲线 Γ 位于平面 $x+y+z=1$ 上，因此通过变换将平面 $x+y+z=1$ 变换为 $O\text{-}uvw$ 空间中的平行于 uOv 坐标面的平面. 因为 $x+y+z=1$ 的法向量为 $\{1,1,1\}$，由此构造正交向量组 $\{1,-1,0\}$，$\{1,1,-2\}$，$\{1,1,1\}$，再单位化后得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{1,-1,0\},\quad \frac{1}{\sqrt{6}}\{1,1,-2\},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}.$$

故作正交变换

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \\ v=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z), \\ w=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}u+\dfrac{1}{\sqrt{6}}v+\dfrac{1}{\sqrt{3}}w, \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}u+\dfrac{1}{\sqrt{6}}v+\dfrac{1}{\sqrt{3}}w, \\ z=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}v+\dfrac{1}{\sqrt{3}}w. \end{cases}$$

变换后，Γ'：$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=1, \\ w=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases}$ 在 Γ 上取三个点 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$ 和 $C(0,0,1)$，则由题意知 Γ 的方向为 $A\to B\to C\to A$. 该变换将 A，B 和 C 分别变为 $A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，$B'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $C'\left(0,-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，故利用注记所述方法可知，$\Gamma'$ 的方向为 $A'\to B'\to C'\to A'$. 即若从 w 轴正向向原点看去，Γ' 为逆时针方向. 且 Γ' 在 $w=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 平面上所围区域为 D_{uv}：$u^2+v^2\leqslant\frac{2}{3}$. 又

$$\Gamma：\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=1, \end{cases}$$

$$P=(x-y)^2=2u^2,\quad Q=(x-z)(y-z)=\frac{3}{2}v^2-\frac{1}{2}u^2,\quad R=x+3y-2z=2\sqrt{6}v-\sqrt{2}u,$$

利用定理 4 和格林公式，并注意到 $w=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和二重积分的奇偶对称性性质，得

$$I=\oint_{\Gamma'}\frac{1}{\sqrt{2}}(P-Q)\mathrm{d}u+\frac{1}{\sqrt{6}}(P+Q-2R)\mathrm{d}v+\frac{1}{\sqrt{3}}(P+Q+R)\mathrm{d}w$$

$$=\oint_{\Gamma'}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{2}u^2-\frac{3}{2}v^2\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{3}{2}v^2+2\sqrt{2}u-4\sqrt{6}v\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iint\limits_{D_{uv}}\left(\frac{3}{\sqrt{6}}u+\frac{3}{\sqrt{2}}v+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{uv}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{9}\sqrt{3}\pi.$$

3　小　　结

曲线积分的换元法进一步完善了曲线积分的理论，丰富了曲线积分的计算方法. 尤其是当平面曲线为二次曲线，且其方程不是标准型时，可通过变换将其转化为标准型后，运用定理 1 或定理 3 简化曲线积分计算. 当空间曲线为柱面（母线未必平行于坐标轴）、旋转曲面（对称轴未必平行于坐标轴）、二次曲面（其方程未必为标准型）与平面（未必平行于坐标面）的交线时，可通过变换将其转化为平行于坐标面

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的平面曲线，且其方程为标准型后，运用定理 2 或定理 4 计算曲线积分.

需要指明的是，在运用对坐标的曲线积分换元法时，确定变换后曲线的方向是一件非常重要，也具有一定难度的事情.

对于曲面积分的换元法，我们另有讨论.

［参　考　文　献］

［1］ 朱士信、唐烁、宁荣健、任蓓、郑婧波，高等数学（下）［M］. 北京：高等教育出版社，2015：175－188.

A Substitution Method of Curve Integral

NING Rong-jian ，　*PENG Kai-jun*[2]

（School of Mathematics，Hefei University of Technology，Hefei 230009，China）

Abstract：A substitution method of curve Integral is presented，the method enrich the calculation method of curve integral.

Key words：curvilinear integral；substitution method；plane curve；space curve；transformation

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net