第 29 卷第 3 期　　大 学 数 学　　Vol. 29, №. 3
2013 年 6 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Jun. 2013

一道数学考研试题的一般形式及其应用

潘　杰，周　玲
（合肥工业大学 数学学院，合肥 230009）

［摘　要］利用微分学方法给出了一道数学考研试题的一般形式并举例说明其应用.
［关键词］方程的根；数列；单调性；极限
［中图分类号］O172　［文献标识码］C　［文章编号］1672-1454(2013)03-0108-04

2012 年全国硕士研究生入学统一考试有这样一道试题：

（Ⅰ）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（n 为大于 1 的整数）在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（Ⅱ）记（Ⅰ）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出极限.

第六届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛（1994 年）也有同类试题（可参阅[1]）：

设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$　$(n=2,3,\cdots)$，证明

(i) 方程 $f_n(x)=1$ 在 $[0,+\infty)$ 内有唯一实根 x_n；

(ii) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

另外，前一试题还曾作为北京师范大学 1997 年[2]及苏州大学 2004 年[3]研究生入学考试题，由此可见这一问题是被很多人所关注的. 本文对这道试题作出了探讨，给出该试题的一个一般性结论，然后举例说明其应用.

定理　设函数 $f(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$（$\alpha<\beta$）上连续，在 (α,β) 内可导，当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时，$0<f(x)<1$ 且 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）. 令

$$F_n(x)=f(x)+f^2(x)+\cdots+f^n(x)-1,$$

若 $F(\alpha)$，$F(\beta)$ 异号，则方程 $F_n(x)=0$ 在 (α,β) 内有唯一实根 x_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$，其中 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

证　易知 $F_n(x)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，又 $F_n(\alpha)$，$F_n(\beta)$ 异号，故由闭区间上连续函数的性质知方程 $F_n(x)=0$ 在 (α,β) 内至少有一个实根. 由于

$$\begin{aligned}F_n'(x)&=f'(x)+2f'(x)f(x)+\cdots+nf'(x)f^{n-1}(x)\\&=f'(x)[1+2f(x)+\cdots+nf^{n-1}(x)],\end{aligned}$$

故由 $0<f(x)<1$ 及 $f'(x)>0$（$f'(x)<0$）知，当 $x\in(\alpha,\beta)$ 时，$F_n'(x)>0$（$F_n'(x)<0$），从而 $F_n(x)$ 在 (α,β) 内严格单调递增（递减），因此方程方程 $F_n(x)=0$ 在 (α,β) 内有且仅有一个根.

设 $F_n(x)=0$ 在 (α,β) 内的唯一实根为 x_n，则 $F_n(x_n)=0$（$n=1,2,\cdots$）. 由于

$$\begin{aligned}F_n(x_{n-1})&=f(x_{n-1})+f^2(x_{n-1})+\cdots+f^{n-1}(x_{n-1})+f^n(x_{n-1})-1\\&=F_{n-1}(x_{n-1})+f^n(x_{n-1})=f^n(x_{n-1})>0=F_n(x_n),\end{aligned}$$

又 $F_n(x_n)$ 在 (α,β) 内严格单调递增（递减），所以

［收稿日期］2012-04-10
［基金项目］高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$x_{n-1}>x_n \quad (x_{n-1}<x_n) \quad (n=2,3,\cdots),$$

即数列$\{x_n\}$单调递减(递增).

又 $x_n>\alpha$ ($x_n<\beta$) ($n=1,2,\cdots$)即数列$\{x_n\}$有下界(上界)，由单调有界数列必有极限知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设其值为 l，由于

$$F_n(x_n)=\frac{f(x_n)[1-f^n(x_n)]}{1-f(x_n)}-1=0,$$

令 $n\to\infty$，注意到$\lim\limits_{n\to\infty}f^n(x_n)=0$ 及 $f(x)$的连续性，所以

$$\frac{f(l)}{1-f(l)}-1=0,$$

解得 $f(l)=\frac{1}{2}$，$l=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

特别在定理中取 $f(x)=x$，$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=1$，则当 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$0<\frac{1}{2}<f(x)<1$，$f'(x)=1>0$. 由于

$$F_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1,$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1=-\frac{1}{2^n}<0, \quad F(1)=n-1>0 \quad (n\geqslant 2),$$

故方程 $x+x^2+\cdots+x^n-1=0$ 在$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有唯一实根 x_n，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

下面再举几个例子进一步说明上述定理的应用.

例 1[4]　设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，试证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$内有且仅有一个根；

(2) 设 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$是 $f_n(x)=1$ 的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$.(北京师范大学研究生入学试题，1999 年)

证　$n=1$ 时，方程 $f_n(x)=1$ 即 $\sin x=1$ 在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$内有唯一实根 $x=\frac{\pi}{2}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x=\frac{\pi}{2}$不是方程 $f_n(x)=1$ 的根，这时可在定理中取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{2}$，$f(x)=\sin x$，则当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$时，$0<\frac{1}{2}<f(x)<1$，$f'(x)=\cos x>0$. 由于

$$F_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x-1,$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1=-\frac{1}{2^n}<0, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=n-1>0 \quad (n\geqslant 2),$$

故方程 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$内有唯一实根 x_n，且有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

例 2　设 $f_n(x)=e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx}$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在$[0,1)$内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in[0,1)$是 $f_n(x)=1$ 的根，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln 2$.

证　$n=1$ 时，方程 $f_n(x)=1$ 即 $e^{-x}=1$ 在$[0,1)$内有唯一实根 $x=0$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x=0$ 不是 $f_n(x)=1$ 的根，这时可在定理中取 $\alpha=0$，$\beta=1$，$f(x)=e^{-x}$，则当 $x\in(0,1)$时，$0<e^{-1}<f(x)<1$，$f'(x)=-e^{-x}<0$. 由于

$$F_n(x)=e^{-x}+e^{-2x}+\cdots+e^{-nx}-1,$$

$$F_n(0)=n-1>0 \quad (n\geqslant 2), \quad F_n(1)=e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-n}-1=\frac{1-e^{-n}}{e-1}-1=\frac{2-e-e^{-n}}{e-1}<0,$$

故方程 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在$(0,1)$内有唯一实根 x_n，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2.$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

例 3 设 $f_n(x)=\ln(1+x)+\ln^2(1+x)+\cdots+\ln^n(1+x)$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\mathrm{e}-1]$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in(0,\mathrm{e}-1]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{\mathrm{e}}-1$.

证 $n=1$ 时，方程 $f_n(x)=1$ 即 $\ln(1+x)=1$ 在 $(0,\mathrm{e}-1]$ 内有唯一实根 $x=\mathrm{e}-1$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x=\mathrm{e}-1$ 不是 $f_n(x)=1$ 的根，这时可在定理中取 $\alpha=0,\beta=\mathrm{e}-1,f(x)=\ln(1+x)$，则当 $x\in(0,\mathrm{e}-1)$ 时，$0<f(x)<1,f'(x)=\dfrac{1}{1+x}>0$. 由于

$$F_n(x)=\ln(1+x)+\ln^2(1+x)+\cdots+\ln^n(1+x)-1,$$
$$F_n(0)=-1<0,\quad F_n(\mathrm{e}-1)=n-1>0\quad(n\geqslant 2),$$

故方程 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\mathrm{e}-1)$ 内有唯一实根 x_n，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-1.$$

例 4 设 $f_n(x)=\arctan x+(\arctan x)^2+\cdots+(\arctan x)^n$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\tan 1]$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in(0,\tan 1]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\tan\dfrac{1}{2}$.

证 $n=1$ 时，方程 $f_n(x)=1$ 即 $\arctan x=1$ 在 $(0,\tan 1]$ 内有唯一的实根 $x=\tan 1$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x=\tan 1$ 不是 $f_n(x)=1$ 的根，这时可在定理中取 $\alpha=0,\beta=\tan 1,f(x)=\arctan x$，则当 $x\in(0,\tan 1)$ 时，$0<f(x)<1,f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}>0$. 由于

$$F_n(x)=\arctan x+(\arctan x)^2+\cdots+(\arctan x)^n-1,$$
$$F_n(0)=-1<0,\quad F_n(\tan 1)=n-1>0\quad(n\geqslant 2),$$

故方程 $F_n(x)=0$ 即 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\tan 1)$ 内有唯一实根 x_n，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\tan\frac{1}{2}.$$

下面问题均为利用本文给出的结论来解答，供读者作为参考.

问题 1[4] 设 $f_n(x)=\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{3}$.（浙江大学研究生入学考试题，2002 年）

问题 2 设 $f_n(x)=\tan x+\tan^2 x+\cdots+\tan^n x$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\arctan\dfrac{1}{2}$.

问题 3 设 $f_n(x)=\arcsin x+(\arcsin x)^2+\cdots+(\arcsin x)^n$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\sin 1]$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in(0,\sin 1]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sin\dfrac{1}{2}$.

问题 4 设 $f_n(x)=\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}^2 x+\cdots+\mathrm{sh}^n x$，求证：

(1) 对任意自然数 n，方程 $f_n(x)=1$ 在 $(0,\ln(1+\sqrt{2})]$ 内有且仅有一个根；

(2) 设 $x_n\in(0,\ln(1+\sqrt{2})]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

注 这里 $\mathrm{sh}x$ 为双曲正弦函数：$\mathrm{sh}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[参　考　文　献]

[1] 李心灿，季文铎，孙洪祥，等. 大学生数学竞赛试题解析选编[M]. 北京：机械工业出版社，2011：65.
[2] 陈守信. 数学分析选讲[M]. 北京：机械工业出版社，2009：29.
[3] 叶国菊，赵大方. 数学分析学习与考研指导[M]. 北京：清华大学出版社，2009：82.
[4] 钱吉林. 数学分析题解精粹[M]. 武汉：崇文书局，2003：227－229.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net