一道考研试题的探讨

程海来

(合肥工业大学 数学学院，安徽 合肥 230009)

摘　要　通过对一道考研试题的探讨，得到一系列有趣的结果，旨在激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新意识和能力.

关键词　研究式教学；微分中值定理；不等式

中图分类号　O172.1　　文献标识码　A　　文章编号　1008-1399(2011)03-0055-03

研究式或探索式教学法是根据有关教学内容适当设置或改变一些条件，提出相关问题，引导学生通过探索、研究得到新结论的方法.这种教学法可以培养学生的好奇心和上进心，促进他们主动地去探索、发现，并成功地解决问题.本文通过一道考研试题的深入探讨，不断提出问题并解决问题，以此激发学生学习数学的兴趣，提高学生的创造性思维能力.

命题 1(1990 年全国硕士研究生入学考试数学试题)[1]　设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$f(a)=f(b),$$

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使得

$$f'(\xi)>0.$$

解　由于 $f(x)$ 不恒为常数，所以，至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)\neq f(a).$$

不妨设

$$f(c)>f(a),$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上满足 Lagrange 定理的条件，故由 Lagrange 中值定理，至少存在一点

$$\xi\in(a,c)\subset(a,b),$$

使得

$$f'(\xi)=\frac{1}{c-a}[f(c)-f(a)]>0.$$

注 1　类似地，在相同条件下，有 $\eta\in(a,b)$ 使

$$f'(\eta)<0.$$

命题 1 使人不由联想起 Rolle 定理，即如果有 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\in D(a,b)$ 且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$. Rolle 定理并不排除在 (a,b) 内存在使 $f'(\xi)\neq0$ 的点，但也不能保证一定存在这样的点.因此，如果加上条件"函数 $f(x)$ 不恒为常数"，则一定存在 $\xi\in(a,b)$，使得有 $f'(\xi)\neq0$.这就是原试题产生的背景.

由于 Rolle 定理有多种推广或引伸，因此我们也可以对命题 1 作进一步的深入探讨，从而得到更多有趣的结果.

命题 2[2-3]　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，又 $f(x)$ 不是线性函数，则在 (a,b) 内存在互异的两点 ξ_1,ξ_2，使得

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\xi_2),\tag{1}$$

或在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.\tag{2}$$

证明　可令

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则有

$$F(a)=F(b)=f(a).$$

因 $f(x)$ 非线性函数，故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为常数.根据命题 1 可知，存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi_1)>0,$$

也即

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\tag{3}$$

根据注 1 可知，存在 $\xi_2\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\tag{4}$$

由(3)、(4)两式即得(1)式成立.

如果

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant0,$$

则由(3)式知

$$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.\tag{5}$$

收稿日期：2009－09－03；修改日期：2011－04－12.

作者简介：程海来(1955－)，男，安徽安庆人，硕士，副教授，从事计算数学研究. Email: hfdxsx@163.com.

如果

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0,$$

则由(4)式知

$$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|. \tag{6}$$

由(5)、(6)两式即知(2)式成立.

注2　命题2中的条件"$f(x)$不是线性函数"可减弱为"$f(x)$不恒为线性函数".

由于Cauchy中值定理及Taylor中值定理均为Lagrange中值定理的推广,因此还成立以下命题.

命题3　设函数$f(x)$, $g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导且

$$g'(x)\neq 0,$$

$$G(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$$

不恒为常数,则存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi). \tag{7}$$

证明　由于$G(x)$不恒为常数,且容易验证

$$G(a)=G(b).$$

故由命题1可知,存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$G'(\xi)>0,$$

也即有(7)式成立.

注3　在命题3的条件下,同理有$\eta\in(a,b)$使

$$f'(\eta)<\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\eta).$$

另外,命题3是命题2的推广.只需在(7)式中取

$$g(x)=x$$

即可得(3)式.

命题4　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有连续一阶导数,在开区间(a,b)内二阶可导且$f(x)$不是二次函数,则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)>\frac{2[f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)]}{(b-a)^2}. \tag{8}$$

证明　可令

$$H(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)],$$

容易验证

$$H(a)=H(b)=H'(a)=0.$$

由Rolle定理知,存在$\eta\in(a,b)$使

$$H'(\eta)=0.$$

因$f(x)$非二次函数,故$f'(x)$非线性函数,从而

$$H'(x)=f'(x)-f'(a)-\frac{2(x-a)}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)]$$

不是常数函数.由于

$$H'(a)=H'(\eta)=0,$$

对$H'(x)$运用命题1,可知存在$\xi\in(a,b)$使

$$H''(\xi)>0,$$

也即(9)式成立.

注4　类似对命题2的讨论,存在$\xi_1\in(a,b)$使

$$|f''(\xi_1)|>\frac{2|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)|}{(b-a)^2}.$$

若将上式中的a与b对换,则存在$\xi_2\in(a,b)$使

$$|f''(\xi_2)|>\frac{2|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)|}{(b-a)^2}.$$

进而如果

$$f'(a)=f'(b)=0,$$

由前分析及Darboux定理可知,存在$\xi\in(a,b)$使

$$|f''(\xi)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明上式是数学分析中的常见习题[2-3].

对$f(x)$的导函数运用命题1,可得以下命题.

命题5　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有连续的一阶导数,在开区间(a,b)内二阶可导且$f(x)$不是线性函数,又若

$$f(a)=f(c)=f(b),$$

其中$c\in(a,b)$,则在(a,b)内至少存在一点ξ使得

$$f''(\xi)>0. \tag{9}$$

证明　在区间$[a,c]$和$[c,b]$上对$f(x)$分别运用Rolle定理可知,存在

$$\xi_1\in(a,c),\quad \xi_2\in(c,b),$$

使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0,$$

由于$f(x)$不是线性函数,故$f'(x)$不是常数函数.对$f'(x)$运用命题1,故存在

$$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),$$

使得(9)式成立.

注5　此问题还可进一步推广.

将命题1运用到两个函数之差,易得如下命题.

命题6　设函数$f(x)$, $g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,两函数之差不恒等于常数,且

$$f(a)=g(a),\quad f(b)=g(b),$$

则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$f'(\xi)>g'(\xi).$$

Rolle定理还可以推广为如下定理.

定理 1[4]　设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导,

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x),$$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

定理 2[4]　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

则至少存在一点 $\xi\in(-\infty,+\infty)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

类似于命题 1 的证明, 可得

命题 7　设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在开区间内 (a,b) 可导,

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to b^-} f(x),$$

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)>0.$$

命题 8　设 $f(x)$ 不恒为常数, 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

则在 $(-\infty,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)>0.$$

另外, Rolle 定理还有其他推广, Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理也有各种推广[4], 因而还有其他一些与前述命题类似的结论, 限于篇幅, 我们不再一一列出, 有兴趣的读者可自行讨论.

参考文献

[1] 大学数学编辑部. 硕士研究生入学考试数学试题精解[M]. 合肥: 合肥工业大学出版社, 2009: 45.

[2] 周民强. 数学分析习题演练: 第一册[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 197-198.

[3] 邝荣雨, 杨新华, 林莉. 数学分析题集[M]. 北京: 教育科学出版社, 1997: 161.

[4] 马保国. 微积分学中值定理研究[M]. 北京: 中国教育文化出版社, 2006: 56-59.

On a Problem in the Graduate Entrance Examination

CHENG Hai-lai

(School of Mathmatics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, PRC)

Abstract: With the intention of stimulating interests and encouraging innovation, we discuss a problem in the graduate entrance examination. Several interesting conclusions are obtained.

Keywords: research-led teaching, differential mean value theorem, inequality

简 讯

2011 年美国大学生数学建模竞赛简介

美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM), 是一项国际级的竞赛项目, 为现今各类数学建模竞赛之鼻祖. MCM/ICM 是 Mathematical Contest in Modeling 和 Interdisciplinary Contest in Modeling 的缩写, 即"数学建模竞赛"和"交叉学科建模竞赛". MCM 始于 1985 年, ICM 始于 2000 年, 由美国自然基金协会和美国数学应用协会共同主办, 美国运筹学学会、工业与应用数学学会、数学学会等多家机构协办, 比赛每年举办一次. MCM/ICM 着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性. 竞赛形式为三名学生组成一队在四天内任选一题, 完成该实际问题的数学建模的全过程, 并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解(及软件)、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围的自我评述等内容写出论文.

2011 年 2 月 11 日至 2 月 15 日(北京时间)来自世界 17 个国家和地区的 3510 个队、10500 名学生参加了此次竞赛, 其中 2775 各队参加了 MCM 竞赛、735 个队参加了 ICM 竞赛. 2011 年 4 月 16 日组委会公布了竞赛成绩, 其中 MCM 评出 8 个特等奖(O), 比例约为 0.3%, 23 个特等奖提名(F), 比例约为 1%, 353 个一等奖(M), 比例约为 13%, 842 个二等奖(H), 比例约为 30%; ICM 评出 6 个特等奖(O), 比例约为 1%, 5 个特等奖提名(F), 比例约为 1%, 146 个一等奖(M), 比例约为 20%, 292 个二等奖(H), 比例约为 40%. 此次竞赛中国共有 7 所院校获得特等奖, 分别为北京大学、清华大学、浙江大学、西北工业大学、成都电子科技大学、东南大学以及华南理工大学. 其中, 清华大学、浙江大学和西北工业大学, 还是同时拥有 MCM/ICM 特等奖和全国大学生数学建模竞赛最高奖"高教社杯"的三所院校.

(孙 浩)